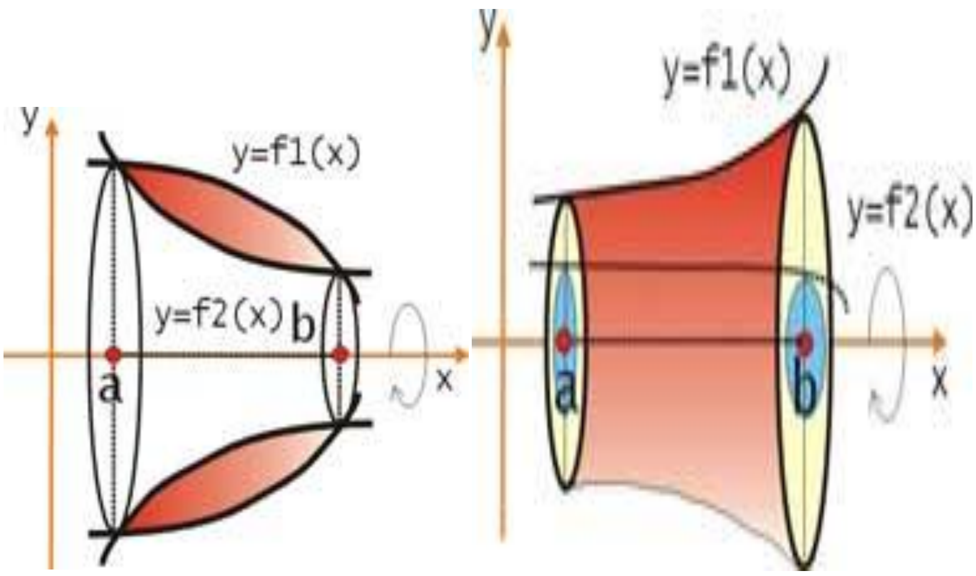
MODUL
MATEMATIKA

INTEGRAL



(MAT 12.1.1)

Disusun Oleh :

Drs. Pundjul Prijono
Nip. 19580117.198101.1.003

PEMERINTAH KOTA MALANG
DINAS PENDIDIKAN
SMA NEGERI 6
Jalan Mayjen Sungkono No. 58 Telp. (0341) 752036 Malang

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini Anda akan mempelajari Integral yang didalamnya menyangkut tentang merancang aturan integral tak tentu dari aturan turunan, Menghitung integral tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri, Menjelaskan integral tentu sebagai luas daerah di bidang datar, Menghitung integral tentu dengan menggunakan integral tak tentu, Menghitung integral dengan rumus integral substitusi, Menghitung integral dengan rumus integral partial.

B. Prasyarat

Untuk mempelajari modul ini, para siswa diharapkan telah menguasai turunan / pendeferensialan suatu fungsi.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu Anda lakukan adalah sebagai berikut:

1. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.

2. Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal Anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.

3. Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat. Jika Anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal evaluasi, kembalilah mempelajari materi yang terkait.

4. Jika Anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat Anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, Anda juga akan dapat mempelajari modul ini melalui Blog Pembelajaran **http://vidyagata.wordpress.com/**

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. Merancang aturan integral tak tentu dari aturan turunan,
2. Menghitung integral tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri,
3. Menjelaskan integral tentu sebagai luas daerah di bidang datar,
4. Menghitung integral tentu dengan menggunakan integral tak tentu,
5. Menghitung integral dengan rumus integral substitusi,
6. Menghitung integral dengan rumus integral partial.
7. Menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel.

BAB II. PEMBELAJARAN

Standar Kompetensi

1. Menggunakan konsep integral dalam pemecahan masalah.

A. INTEGRAL.

Kompetensi Dasar : 1.1. Menggunakan konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan integral tak tentu dan integral tentu.

Indikator

o Merancang aturan integral tak tentu dari aturan turunan,

o Menghitung integral tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri,

o Menjelaskan integral tentu sebagai luas daerah di bidang datar,

o Menghitung integral tentu dengan menggunakan integral tak tentu,

o Menghitung integral dengan rumus integral substitusi,

o Menghitung integral dengan rumus integral partial.

Pengalaman Belajar : 1.1.1. Merumuskan aturan tak tentu melalui kejian pustaka.

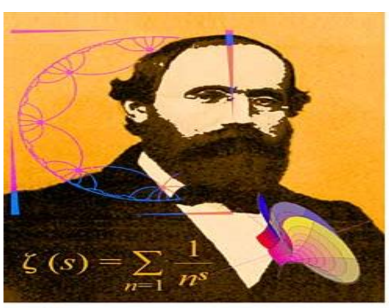
1.1.2. Menggunakan aturan integral untuk menyelesaikan masalah.

Sebelum mempelajari serta mengenal, memahami dan menyelesaikan beberapa permasalahan matematika yang menyangkut Integral tak tentu dan Integral tentu diharapkan peserta didik secara mandiri dan atau kelompok diskusi menggali informasi dan pengalaman belajar terdahulu (Limit dan fungsi turunan) serta pengembangan dasar integral dari beberapa sumber referensi maupun media interaktif. Diskusikan dengan kelompok belajar anda, guna memahami beberapa hal berikut ini:

Pengantar materi:

Kegunaan integral sebagai ilmu bantu dalam geometri, teknologi, biologi dan ekonomi tak dapat disangkal lagi. Orang yang tercatat dalam sejarah pertama kali mengemukakan ide tentang integral adalah Archimedes seorang ilmuwan bangsa Yunani yang berasal dari Syracusa (287 – 212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah suatu lingkaran, daerah yang dibatasi oleh parabola dan tali busur dan sebagainya. Sejarah mencatat orang yang paling berjasa dalam hal pengembangan kalkulus integral adalah Georg Friederich Benhard Riemann (1826 – 1866).

Archimedes



Riemann

Dalam konsep defferensial (turunan) fungsi telah kita pahami teorema dasar sebagai berikut:

Fungsi aLjabar

Fungsi Aljabar	*Fungsi Trigonometri*
$y = ax^n \rightarrow y' = a.nx^{n-1}$	$y = \sin f(x) \rightarrow y' = f'(x) \cos f(x)$ $y = \cos f(x) \rightarrow y' = -f'(x) \sin (x)$
$y = 2x^4 \rightarrow y' = 2(\ldots)x^{\cdots}$	$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$
$y = 3x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = (\ldots)\frac{3}{2}x^{\cdots-1}$	$y = \cos 5x \rightarrow y' = -\cdots. \sin(\ldots)$
$y = 5x\sqrt{x}$ -2$\rightarrow y' = \cdots.$	$y = 2 \sin(3x - 4) \rightarrow y' = 2(\ldots\ldots)\cos(3x - \cdots.)$

A.1. INTEGRAL SEBAGAI ANTI DEFFERENSIAL.

Definisi: F(x) disebut anti turunan dari f(x) pada interval I, jika $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ untuk semua x dalam I.

Perhatikan beberapa masalah di bawah ini:

Fungsi [F(x)]		*Fungsi Turunan [f(x)]*
$y = 2x^5$	$\longrightarrow$	$y' = 2(\ldots..)x^{5-\cdots} = \cdots\ldots\ldots$
$y = 2x^5 + 15$	$\longrightarrow$	$y' = 2(\ldots..)x^{5-\cdots} = \cdots\ldots\ldots$
$y = 2x^5 - 543$	$\longrightarrow$	$y' = 2(\ldots..)x^{5-\cdots} = \cdots\ldots\ldots$
$y = 2x^5 + c$	$\longrightarrow$	$y' = 2(\ldots..)x^{5-\cdots} = \cdots\ldots\ldots$

$\longleftarrow$

Integral : $\int f(x)dx = F(x) + \cdots..$

Anti turunan f(x) dinotasikan $\int f(x)dx$, lambang $\int$ dinamakan Integral, sedang f(x) disebut Integran dan dx adalah defferensial dari x.

Secara umum anti defferensial (turunan) dinyatakan: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + \cdots.}$

A.2. Integral Tak Tentu

a. Integral Fungsi Aljabar.

Berangkat dari pengertian integral sebagai anti defferensial sebagaimana dijabarkan pada bagian terdahulu, perhatikan beberapa hal berikut:

$F(x) = 3x^5$	$\rightarrow$	$F'(x) = f(x) = 3(\ldots\ldots)x^{5-\cdots} = 15x^4$	$F(x) = \int 15x^4 dx = 3x^5 +$
$F(x) = 3x^5 - 6$	$\rightarrow$	$F'(x) = f(x) = 3(\ldots\ldots)x^{5-\cdots} = 15x^4$	
$F(x) = 3x^5 + 100$	$\rightarrow$	$F'(x) = f(x) = 3(\ldots\ldots)x^{5-\cdots} = 15x^4$	
$F(x) = 3x^5 - 1256$	$\rightarrow$	$F'(x) = f(x) = 3(\ldots\ldots)x^{5-\cdots} = 15x^4$	
$F(x) = 3x^5 + C$	$\rightarrow$	$F'(x) = f(x) = 3(\ldots\ldots)x^{5-\cdots} = 15x^4$	

Nampak bahwa dapat diwakili oleh -6 atau 100 atau -1256 atau C dan biasa dikenal dengan Konstanta (bilangan tak tentu), sehingga secara umum diwakili C.

Proses mendapatkan fungsi anti turunan dapat diikuti sebagai berikut:

$$F(x) = \int 15x^4 dx = \frac{15}{\ldots.+1}x^{4+\cdots} + c = \frac{15}{\ldots}x^{\cdots} + C = \cdots..x + C$$

Kesimpulan : Integral tak tentu fungsi aljabar didefiniskan: $\boxed{\int \boldsymbol{ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c}}$

Contoh 1:

Tentukan anti turunan (Integral) fungsi dari beberapa fungsi turunan di bawah ini:

$a. \int 2x^3 dx$ $\quad b. f(x) = x\sqrt{x} - 2$ $\quad c. f(x) = x^3\sqrt{x} + 10$

Penyelesaian :

$$a. \int 2x^3 dx = \frac{2}{3+\cdots}x^{3+\cdots} + c = \frac{2}{\ldots}x^{\cdots} + c = \frac{1}{\ldots}x^4 + c$$

$$b. \int (x\sqrt{x} - 2)dx = \int \left(x^{1+\frac{1}{2}} - 2\right)dx = \int (x^{\frac{\cdots}{2}} - 2)dx = \int x^{\frac{\cdots}{2}}dx - \int 2dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{\frac{\cdots}{2}+1}x^{\frac{3}{\cdots}+1} - \frac{2}{0+1}x^{0+1} + c = \frac{1}{\frac{5}{\cdots}}x^{\frac{5}{\cdots}} - \cdots.x^{\cdots} + c}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{\ldots}x^{\cdots}\sqrt{x} - \cdots.x + c}$$

$$c. \int (x^3\sqrt{x} + 10)dx = \int \left(x^{-} + 10\right)dx = \frac{1}{\frac{7}{\cdot\cdot}+1}x^{\frac{7}{\cdots}+\frac{2}{2}} + \cdots.x + c$$

$$= \frac{2}{\ldots}x^{\frac{9}{\cdots}} + 10x + c = \,—x^{\cdots}\sqrt{x} + \ldots.x + c$$

Kegiatan Modul 12.1.1

Agar mempunyai wawasan tentang anti turunan / Integral fungsi aljabar dengan baik , kerjakan soal dibawah ini dengan baik.

Hitung Integral dari:

$a. f(x) = 2$ $c. f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ $e. y = 5x\sqrt{x}$

$b. f(x) = 3x^5$ $d. y = \sqrt{x}$ $f. y = \frac{2x^3}{\sqrt{x}}$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.1 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.1

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham konsep Integral maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang Integral sebagai anti turunan.
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

b. Integral Fungsi Trigonometri.

Berangkat dari pengertian integral sebagai anti defferensial sebagaimana dijabarkan pada bagian terdahulu, perhatikan beberapa hal berikut:

$y = sinx$ $\rightarrow$ $y' = \cos x$ Maka $\int cosx\ dx = \cdots + c$

$y = cosx$ $\rightarrow$ $y' = -\cdots..$ Maka $\int sinx\ dx = -\cdots + c$

$y = \cos 3x$ $\rightarrow$ $y' = -3sin3x$ Maka $\int \sin 3x\ \ dx = -\frac{1}{\dots} \dots \dots . + c$

Kesimpulan :

$y = sin\,x\,dx = \ -\cos x + c$ Dan $\int A.\sin(ax + b)\,dx = -\frac{A}{a}\cos\ (ax + b) + c$

$y = \cos \quad x\ dx$ = sin x + c Dan $\int A.\cos(ax + b)\,dx = \frac{A}{a}\sin\ (ax + b) + c$

Contoh 2:

Tentukan anti turunan (Integral) fungsi trigonometri dari beberapa fungsi turunan di bawah ini:

$a. f(x) = \sin x$ $b. f(x) = 3\cos x$ $c. f(x) = 3\sin 2x$ $d. f(x) = 2\cos(3x - 1)$

Penyelesaian :

$a. \int \sin x \, dx = -\cos x$ $\quad$ $c. \int 3 \sin 2x \; dx = -\frac{3}{\dots} \cos 2x + c$

$b. \int 3 \cos x \, dx = (\dots.) \sin x + c$ $\quad$ $d. \int 2\cos(3x-1)dx = \frac{2}{\dots} \sin(\dots.x - 1) + c$

Kegiatan Modul 12.1.2

Agar mempunyai wawasan tentang anti turunan / Integral fungsi trigonometri dengan baik , kerjakan soal dibawah ini dengan baik.

Tentukan anti turunan (Integral) fungsi trigonometri berikut ini :

1. Hitung Integral dari :

$a. f(x) = \sin(2x-1)$ $\quad$ $b. f(x) = 3\cos 2x$ $\quad$ $c. f(x) = 5\sin(2x+5)$

2. Selesaikan Integral dibawah ini :

$a. \int \cos 4x \; dx$ $\quad$ $b. \int 3 \sin 4x \; dx$ $\quad$ $c. 3\cos(3x+2)dx$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.2 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.2

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham konsep Integral maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang Integral sebagai anti turunan.
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

c. Sifat Integral Tak Tentu.

Jika f dan g suatu fungsi yang mempunyai anti turunan (Integral) dan k suatu konstanta, maka:

$$\boldsymbol{a.} \int \boldsymbol{k.dx = k.x + c}$$

$$\boldsymbol{b.} \int \boldsymbol{k.f(x)dx = k} \int \boldsymbol{f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{c.} \int [\boldsymbol{f(x)} \pm \boldsymbol{g(x)}]\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{f(x)dx} \pm \int \boldsymbol{g(x)dx}$$

Contoh 3.

Tentukan anti turunan (Integral) fungsi dari beberapa fungsi turunan di bawah ini:

$a. f(x) = x^3 - 2$ $\quad$ $b. f(x) = (x-2)^2$ $\quad$ $c. f(x) = 2x + sin2x$ $\quad$ $d. f(x) = 3x^2 - cos(3x-1)$

Penyelesaian :

$a. \int (x^3 - 2)dx = \int x^3 dx - \int 2\, dx = \frac{1}{\dots} x^{3+\dots} - \dots..x + c = \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} - \dots.x + c$

$b. \int (x-2)^2 dx = \int (x^2 - \dots x + \cdots)dx = \frac{1}{\dots} x^{\dots+1} - \frac{4}{\dots} x^{\dots} + 4x + c = \frac{1}{\dots} x^{\dots} - \dots x^2 + 4x + c$

$c. \int (2x + sin2x)dx = \int 2x\, dx + \int \sin 2x.dx = \frac{2}{\dots} x^{1+\dots} - \frac{1}{\dots} \cos 2x + c = x^{\dots} - \frac{1}{\dots} \cos 2x + c$

$d. \int [3x^2 - \cos(3x-1)]dx = \frac{3}{\dots} x^3 - \frac{\dots}{3} \sin(\dots - 1) + c$

Contoh 4.

Berikut ini adalah contoh aplikasi Integral

Diketahui $F'(x) = 4x^3 - 6x + 4$ dan F(1) = 8 , Tentukan F(x) ?

Penyelesaian :

$F(x) = \int F'(x)dx = \int (4x^3 - 6x + 4)dx = \frac{4}{\dots} x^{\dots} - \frac{6}{\dots} x^2 + \dots.x + c = x^{\dots} - \cdots.x^2 + 4x + c$

Dari F(1) = 8 maka : $8 = 1^4 - 3(\dots)^2 + 4(\dots) + c$

$8 = 1 - \cdots. + \cdots.. + c$

$8 = \cdots.. + c \rightarrow c = \cdots$

Jadi $F(1) = x^4 - (\dots)x^{\dots} + \dots.x + \cdots..$

Contoh 5.

Gradien pada garis setiap titik (x , y) dari suatu kurva y = f(x) ditentukan oleh $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{4}{x^2}$

Jika diketahui bahwa kurva tersebut melalui titik (2,5) maka Tentukan persamaan kurvanya !

Penyelesaian :

$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{4}{X^2} \rightarrow y = \int \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) dx = \int (\dots. - 4x^{\dots})dx$

$= x - \frac{4}{-\dots} x^{-1+\dots} + c = \cdots + \frac{\dots}{x} + c$

Kurva diatas melalui titik (2,5) sehingga :

$5 = \cdots \dots + \frac{\dots..}{2} + c \leftrightarrow 5 = \cdots. + c \leftrightarrow c = \cdots$

Jadi persamaan kurva $y = \cdots.. + \frac{4}{\dots} + \cdots..$

Kegiatan Modul 12.1.3

Agar mempunyai wawasan tentang aplikasi Integral dengan baik , kerjakan soal dibawah ini :

1. Hitung Integral dari :

$a. f(x) = x^4 - 1$	$e. f(x) = 2x + \cos x$
$b. f(x) = x\sqrt{x}$	$f. y = \sin 2x - \cos x$
$c. f(x) = (x-3)^2$	$g. y = 3x^2 - \sin(3x-1)$
$d. f(x) = (2x-1)(\sqrt{x} + 2)$	$h. y = 2x\sqrt{x} - 2\cos 3x$

2. Tentukan persamaan kurva yang gradien garis singgungnya adalah $6x^2$ dan melalui titik (-3, 1) ?

3. Tentukan persamaan kurva jika diketahui $\frac{dy}{dx}= 2x +1$ dan melalui titik (2, 10) ?

4. Pada titik (x, y) sebiuah kurva, gradien garis singgungnya ditentukan oleh $\frac{dy}{dx} = 3 - x$ Jika nilai maksimum dicapai pada y = 3,5 maka Tentukan persamaan kurva tersebut !

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.3 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.3

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham aplikasi Integral maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang aplikasi Integral
- Jika nilai perolehan $\geq$ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

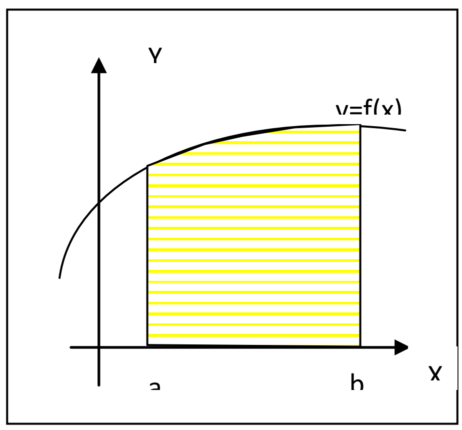
A.3. Integral Tertentu

a. Luas sebagai Limit Suatu Jumlah.

Berbicara tentang luas suatu bidang datar, akan teringat beberapa aturan atau konsep menentukan luas suatu bangun datar sebagai mana telah dipelajari mualai jenjang SLTP s/d SLTA diantaranya luas segitia, segi empat, segi lima, dst.

Bagimana jika kita berhadapan dengan suatu bangun datar yang sebagian batas (sisinya) berbentuk kurva (garis lengkung), tentunya perlu pendekatan konsep baru guna mendapatkan cara menentukan luas daerah suatu bangun yang tak teratur.

Perhatikan dan diskusikan beberapa hal berikut ini:
Gambar disamping menunjukan daerah yang diarsir Merupakan daerah yang dibatasi oleh sebuah kurva Defferensiabel (ada anti turunannya) y = f(x), garis x = a, x = b dan sumbu x, berapakah Luas Daerah yang diarir (LR) ...... ?

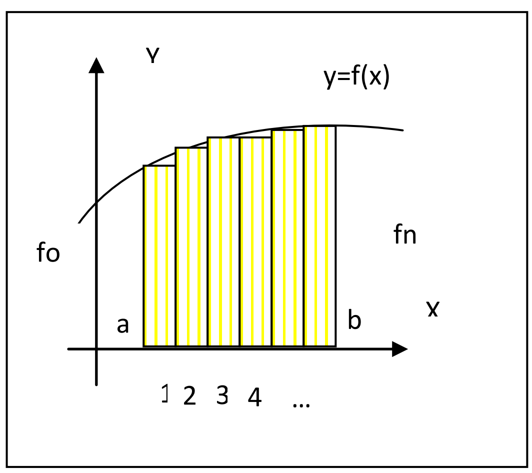


LR akan didekati dengan Jumlah Luas segi-4 yangdibuat dalam selang tertutup a ≤ x ≤ b, dengan lebar Δx (perhatikan gambar) sehingga didapat:

LR = fo Δx + f1 Δx + f2 Δx + ….. + fn Δx

= (fo + f1 + f2 + … + fn) . Δx

$$= \sum_{a}^{b} f_x . \Delta x$$



Guna mendekati Luas maksimum, $\Delta x \rightarrow 0$ sehingga didapat: $LR = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b fx.\Delta x$

Dikenal dengan ***Luas sebagai limit suatu jumlah***.

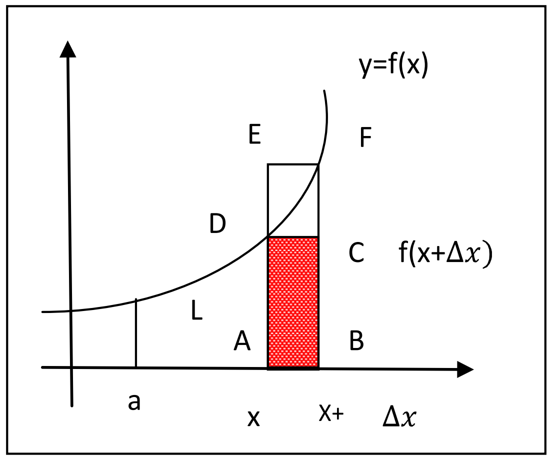
Bentuk $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b$ disederhanakan menjadi $\int$, sehingga :

$$\boldsymbol{LR = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b fx.\Delta x \leftrightarrow LR = \int_a^b f(x)dx}$$

b. Teorema Integral Tentu.

Perhatikan gambar di samping:

Misalkan : L = $\int_a^b f(x)dx$ dan ΔL adalah luas daerah ABED, sehingga:



Luas ABCD < Luas ABED < Luas ABEF

f(x) . Δx < ΔL < f(x + Δx) . Δx (semua ruas dibagi Δx)

$$f(x \to 0) < \frac{\Delta L}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)$$

$$\boldsymbol{f(x) \le \frac{dL}{dx} \le f(x) \to \frac{dL}{dx} = f(x)}$$

Sehingga :

$$\boldsymbol{L = \int \frac{dL}{dx}.dx = \int f(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c}$$

Jika x = a maka L = 0, Sehingga: 0 = F(a) + C → C = - F(a) akibatnya L = F(x) – F(a)

Pada akhirnya didapat : $\boldsymbol{L = \int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x) \Big|_a^b}$

Dan dikenal dengan teorema dasar kalkulus (Integral tertentu).

[a, b] disebut batas integrasi, a disebut batas bawah dan b disebut batas atas.

Contoh 6.

Hitung nilai dari :

$a. \int_0^2 \mathbf{2x^3dx}$ $\qquad$ $\mathbf{b.} \int_1^3 \mathbf{(x^3 - 2)dx}$ $\qquad$ $\mathbf{c.} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathbf{sin3x.dx}$

Penyelesaian :

$$a. \int_0^2 2x^3 dx = \frac{2}{\dots} x^{3+\dots} \Big|_0^2 = \frac{1}{\dots} x^{\dots} \Big|_0^2 = \left[\frac{1}{2}(\dots..)^4 - \frac{1}{2}(\dots..)^4\right] = \frac{16}{\dots} - 0 = \cdots.$$

$$b. \int_1^3 (x^3 - 2)dx = \left[\frac{1}{\dots} x^{\dots+1} - \frac{2}{\dots} x^{0+\dots}\right]_1^3 = \left[\frac{\dots}{4} x^{\dots} - \dots x\right]_1^3$$

$$= \left(\frac{\dots}{4}(\dots)^4 - 2(\dots)\right) - \left(\frac{\dots.}{\dots.} 1^{\dots} - 2.1\right) = \left(\frac{81}{\dots} - 6\right) - \left(\frac{1}{4} - \cdots\right)$$

$$= \frac{81 - \cdots}{4} - \frac{1 - \cdots}{4} = \frac{\dots. - \cdots.}{4} = \frac{\dots.}{\dots.} \dots.$$

$$c.\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x.dx = -\frac{1}{\dots}\cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{\dots}\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(-\frac{1}{\dots}\cos 3(\dots)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\dots}\cos(\dots)\right) - \left(-\frac{1}{\dots}cos.0\right) = -\frac{1}{\dots}(\dots) + \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots} + \frac{1}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

Beberapa sifat Integral Tertentu:

$$a.\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$b.\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$c.\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, dengan a<c<b

$d.\int_b^a kf(x)dx = k\int_b^a f(x)dx$, k=konstanta

$$e.\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

Contoh 7.

Hitung nilai dari :

$a.\int_0^2 3x^5\ dx = \cdots$

$b.\int_6^{\frac{\pi}{6}} (cosx - \sin 3x)dx = \cdots$

Penyelesaian :

$$a.\int_0^2 3x^5\ dx = 3\int_0^2 3x^5\ \mathrm{dx} = 3\left[\frac{3}{\dots}x^{\dots}\right]\Big|_0^2 = 3\left[\frac{\dots}{2}x^{\dots}\right]\Big|_0^2 = 3\left[\left(\frac{1}{2}(\dots.)^6\right) - \left(\frac{1}{2}0^6\right)\right]$$

$$= 3\left[\frac{\dots}{2} - 0\right] = 3.\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$b.\int_6^{\frac{\pi}{6}} (cosx - \sin 3x)dx = \sin x + \frac{1}{\dots}\cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(sin\left(\frac{\pi}{\dots}\right) + \frac{1}{\dots}\cos 3\left(\frac{\pi}{\dots.}\right)\right) - \left(sin(\dots.) + \frac{1}{\dots}\cos 3(\dots)\right)$$

$$= \left(\dots + \frac{1}{\dots}(\dots)\right) - \left(\dots + \frac{1}{\dots}\right) = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots.}{\dots.}$$

Kegiatan Modul 12.1.4

Agar mempunyai wawasan tentang Integral tertentu dengan baik , kerjakan soal dibawah ini :

1. Hitunglah nilai dari:

$a. \int_1^3 x^2\, dx$ c. $\int_0^4 (x+2)^2\, dx$ $e. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\, dx$

$b. \int_{-1}^2 (1+3x)(1-x)dx$ $d. \int_1^4 (1-x)\sqrt{x}\, .dx$ $f. \int_0^{\pi} (\cos 2x - 3\sin 3x)\, dx$

2. Diketahui fungsi f(x) = $2x^2$ +4x -1, g(x) = $3x^2$ maka Hitunglah :

$$a. \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

$$b. \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} 3[f(x) - g(x)]dx$$

3. Tentukan nilai p dari tiap integral berikut:

$$a. \int_p^0 (x^2 - 4x)dx = 4$$

$$b. \int_{-3}^{p} \left(2 - \frac{2}{3}x\right) dx = 12$$

$$c. \int_1^{2p} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.4 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.3

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham aplikasi Integral maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang aplikasi Integral
- Jika nilai perolehan $\geq$ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

A.4. INTEGRAL FUNGSI MAJEMUK.

Pada saat kita membicarakan integral sering kali didapati bahwa teorema dasar kalkulus integral tidak dapat digunakan untuk menentukan hasil dari suatu proses integral, hal ini terjadi karena fungsi yang akan ditentukan anti turunannya termasuk dalam fungsi majemuk. Dan diharapkan anda mempelajari / membuka kembali konsep dasar Turunan Fungsi utamanya pendekatan Turunan Fungsi dari GW. Leibniz (1646-1716) yaitu: $\frac{dy}{dx}$

Untuk itu perlu langkah-lngkah sistematis agar nilai integral fungsi majemuk dapat ditentukan, dan ada beberapa metode penyelesaiannya antara lain:

a. Integral Substitusi.

Konsep dasar metode ini adalah melakukan penyederhanaan fungsi dengan bantuan permissal- an variabel lain, sehingga bentuk fungsinya menjadi sederhana dan memenuhi kaidah teorema dasar integral.

Untuk memahami beberapa konsep integral substitusi cobalah soal berikut ini:

Contoh 8.

$a. \int (2x-1)^2 dx =$ $\quad$ $b. \int \sin(4x-1)\, dx =$ $\quad$ $c. \int x\sqrt{x^2-3}\, dx$

$=$ $\quad$ $d. \int cos^3 x \,.\sin x\,.dx = \cdots$

Penyelesaian :

$a. \int (2x-1)^2 dx =$ masalah yang kita hadapi adalah kesulitan memfaktorkan fungsi, maka:

missal: t = 2x -1 → $\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx.}} = \cdots$.sehingga $dx = \frac{dt}{\dots\dots}$, maka didapat bentuk :

$$\int (2x-1)^8 dx \leftrightarrow \int t^8 \frac{dt}{2} = \frac{1}{\dots}.\frac{\dots}{9} t^{\cdots} + \dots.+c$$

Jadi : $\int (2x-1)^8 dx = \frac{\cdots}{18}(2x-\cdots)^9 + c$

$b. \int \sin(4x-1)\, dx$

Missal : a = 4x -1 → $\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dx.}} = \cdots$ sehingga $dx = \frac{da}{\dots\dots}$ maka didapat bentuk :

$$\int \sin(4x-1)\, dx \leftrightarrow \int \sin a \frac{da}{\dots} = \frac{1}{\dots.}\sin a. da = \frac{1}{4}(- \dots\dots\dots\dots..) + c$$

Jadi : $\int \sin(4x-1)\, dx = -\frac{1}{\dots\dots}\cos(\dots..-1) + c$

$c. \int x\sqrt{x^2-3}\, dx =$

Misal : $d(x^2-3) = 2x\, dx \rightarrow x\, dx = \frac{d(x^2-3)}{\dots\dots\dots\dots}$, sehingga didapat bentuk :

$$\int x\sqrt{x^2-3}\, dx = \int \sqrt{x^2-3}.\frac{d(\dots.^2-3)}{2} = \frac{1}{\dots.}\int (x^2-\dots.)^{\frac{1}{2}} d(x^2-\dots)$$

$$= \frac{1}{....}\ \frac{.....}{\frac{3}{...}}\ (x^{.....} - \ ......)^{\frac{....}{2}} + \ c$$

$$= \frac{...}{3}(x^2 - \ ....)\sqrt{(....-3)} + c$$

$d.\int cos^3x.sinx\ dx$

Missal : $p = \cos x\ \rightarrow\ \frac{dp}{dx} = \ -\sin x\ \rightarrow dp = -\sin x\ dx$ maka $- d(cosx) = sinx\ dx$

Sehingga : $\int cos^3x\ .\sin x.dx = \ \int cos\ ^3x.(-d(cosx)) = -\int cos^3x.d\ (\ ....)$

$$= -\frac{1}{.....}\ cos^{3+...} + c = \ -\ \frac{....}{4} cos^{....}\ x + c$$

Kegiatan Modul 12.1.5

Agar mempunyai wawasan tentang Integral substitusi dengan baik , kerjakan soal dibawah ini :

1. $a.\ \ \int(2x+3)^5dx$ $c.\int\sqrt{6x+2}\ .dx$ $e.\int\cos(3x-1)\ dx$

   $b.\int 2x(x^2+5)^6\ dx$ $d.\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{3x^2-1}}$ $f.\int sin^5x.\cos x.dx$

2. $a.\int_0^2(3x-5)^4\ dx$ $c.\int_2^3\frac{dx}{(2x-3)^2}$ $e.\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\ dx$

   $b.\int_0^4 x\sqrt{x^2-2}.dx$ $d.\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2x.dx$ $f.\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x.cos^3\ x.dx$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.5 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.5

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham aplikasi Integral maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang aplikasi Integral
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

b. Integral Partial.

Telah dipelajari jika u dan v masing-masing fungsi x yang deferensiabel, maka sudah anda ketahui bahwa : Jika y = u. v maka $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx} = u'.v + u.v'}$

Dalam bentuk lain : $\frac{dy}{dx} = \ \frac{du}{dx}.v + u.\frac{dv}{dx}\ \leftrightarrow\ \frac{d(u.v)}{dx} = \ \frac{du}{dx}.v + u.\frac{dv}{dx}$

Atau **d(u.v) = v.du + u.dv**

Kemudian jika ke dua ruas di integralkan, maka diperoleh :

$\int d(u.v) = \ \int v.du + \ \int u.dv$

$u.v = \int v.du + \int u.dv$ atau $\boxed{\int \boldsymbol{u.dv} = \boldsymbol{u.v} - \int \boldsymbol{v.du}}$ **disebut rumus Integral partial**

Contoh 9.

Selesaikan Integral berikut :

$a. \int x.cosx.dx$ $\qquad b. \int x\sqrt{1+x}\ dx$ $\qquad c. \int x^2 \sin x.dx$

Penyelesaian :

$a. \int x.cosx.dx =\ldots$, dipilih : u = v dan dv = cos x dx

$$\text{du} = \ldots \qquad v = \int \cos x\ dx = \cdots \ldots.$$

Sehingga $\int u\ dv = u.v - \int v\ du$

Didapat : $\int x.\cos x\ dx = (\ldots.).\sin x - \int \ldots\ldots dx = x\ (\ldots..) - (-\cdots\ldots) + c$

$$= x.(\ldots\ldots) + \ldots\ldots.+c$$

$b. \int x\sqrt{1+x}\ dx$, dipilih u = v dan $dv = \sqrt{1+x}\ dx$

$$du\ \ldots\ldots \qquad v = \int \sqrt{1+x}\ dx = \int (\ldots..)^{\frac{1}{2}} d\ (1+\cdots)$$

$$= \frac{\cdots}{3}\ (1+\cdots)^{\frac{3}{\cdots}}$$

$$\int x\sqrt{1+x}\ dx = \frac{\ldots.}{3} x\ (1+\cdots.)^{\frac{3}{\cdots}} - \int \frac{2}{\cdots} (1+\cdots)^{\frac{2}{3}} dx$$

$$= \frac{\ldots.}{3} x\ (1+\cdots.)^{\frac{3}{\cdots}} - \int \frac{2}{\cdots} (1+\cdots)^{\frac{2}{3}} d(1+x)$$

$$= \frac{\ldots.}{3} x\ (1+\cdots.)^{\frac{3}{\cdots}} - \frac{4}{\cdots} (1+\cdots)^{\frac{5}{\cdots}} + c$$

$$= \frac{2}{\cdots} x\ (1+\cdots.)\sqrt{1+\cdots.} - \frac{\ldots.}{15} (1+\cdots)^2 \sqrt{\ldots.+x} + c$$

$c. \int x^2 \sin x.dx$, dipilih $u = x^2\ \ dan\ dv = \sin x\ dx$

$$du = \cdots.. \qquad v = \int \sin x\ dx = -\cdots$$

Sehingga : $\int u.dv = u.v - \int v.du$

Didapat : $\int x^2 \sin x.dx = x^2.(\ldots\ldots..) - \int \cos x \ldots..dx = x^2 \ldots\ldots - 2\int 2.\cos x\ .dx$

Khusus : $\int x.\cos x\ .dx = x\ (\ldots) + \ldots.+c$

Jadi : $\int x^2 \sin x.dx = x^2 \ldots\ldots.. -2\ [x.(\ldots\ldots\ldots) + \ldots\ldots] + c$

Kegiatan Modul 12.1.6

Agar mempunyai wawasan tentang Integral partial dengan baik , kerjakan soal dibawah ini :

1. Selesaiakan integrasi berikut ini :

$a. \int x(x+4)^5\, dx$ $c. \int x\sqrt{2x+1}\, dx$ $e. \int x.\sin x\, .dx$

$b. \int \frac{x.dx}{\sqrt{2x+5}}$ $d. \int x^2 \cos 2x\, dx$ $f. \int x.\ln x.dx$

2. Hitung Nilai dari :

$a. \int_0^2 x.(3x-5)^4\, dx$ $c. \int_2^3 \frac{x.dx}{(2x-3)^2}$ $e. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos 2x.dx$

$b. \int_0^4 x\sqrt{x-1}.dx$ $d. \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x.\sin x\, .dx$ $f. \int_0^{\frac{\pi}{3}} x.sin2x.dx$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.6 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.6

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham aplikasi Integral maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang aplikasi Integral
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka artinya anda sudah paham tentang menggunakan Konsep , sifat , dan aturan dalam perhitungan Integral tak tentu dan integral tertentu . Siapkan diri anda untuk mengevaluasi hasil belajar modul ini, mintalah **Uji Kompetensi KD 12.1.1** pada guru anda .

B. BEBERAPA PENGGUNAAN INTEGRAL.

Kompetensi Dasar : 1.2. Menggunakan integral untuk menghitung luas daerah dan volume benda putar.

Pengalaman Belajar :
1.2.1. Menghitung luas suatu daerah menggunakan aturan integral tentu..
1.2.2. Menghitung volume benda putar dengan menggunakan aturan integral tentu.

Sebelum mempelajari serta mengenal, memahami dan menyelesaikan beberapa permasalahan matematika yang menyangkut beberapa penggunaan Integral tentu diharapkan peserta didik secara mandiri dan atau kelompok diskusi menggali informasi dan pengalaman belajar terdahulu dari beberapa sumber referensi maupun media interaktif.
Diskusikan dengan kelompok belajar anda, guna memahami beberapa hal berikut ini:

Pengantar materi:

Telah kita ketahui bahwa Integral tentu pada hakekatnya diturunkan dari konsep Luas sebagai suatu limit jumlah,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b fx.\Delta x \leftrightarrow LR = \int_a^b f(x).dx$$

$$= \int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

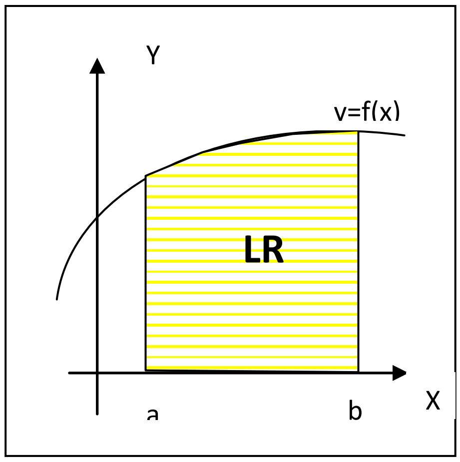
Konsep inilah yang mendasari beberapa kegunaan konsep integral untuk menentukan luas daerah dan volume benda putar.

B.1. MENENTUKAN LUAS DAERAH.

B.1.1. Luas Daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x) , dan sumbu x.

Luas daerah yang dibatasi oleh Kurva y = f(x), x = a , x = b dan sumbu x, didefinisikan :

$$\boxed{LR = \int_a^b f(x).dx}$$



Contoh 10.

Hitung Luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = x - 1 , x = 0 , x = 2 dan sumbu x !

Penyelesaian:

Sesuai dengan definisi maka:

$$LR = \int_0^2 (x-1)dx = \frac{1}{\dots.}\, x^{\dots} - \dots..\Big|_0^2 = \left(\frac{1}{\dots.}\, 2^{\dots} - \dots..\right) - (0) = \cdots..$$

Contoh 11.

Hitung Luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = x^2 - 6x + 8 dan sumbu x !

Penyelesaian:

Batas integrai diperoleh dari titik potong kurva terhadap sumbu x → y = 0

$x^2 - 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; (x-2)(x-4) = 0$ maka x – 2 = 0 atau x – 4 = 0

x = 2 x = 4

Sehingga : $LR = \int_2^4 (x^2 - 6x + 8)dx = \frac{1}{\dots..} x^{\dots} - \frac{6}{\dots.} x^2 + \dots.x \Big|_2^4$

$$= \frac{1}{\dots..}\, x^3 - 3x^{\dots} + 8x \Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{1}{\dots.}(\dots.)^3 - 3\,(\dots..)^2 + 8\,(\dots.)\right) - \left(\frac{1}{3}2^{\dots} - 3(\dots.)^2 + 8\dots.\right)$$

$$= \left(\frac{\dots.}{\dots.} - \dots\dots + \dots.\right) - \left(\frac{\dots.}{\dots.} - \dots. + \dots.\right) = \frac{\dots.}{\dots.} - \frac{\dots.}{\dots.} = \frac{\dots.}{\dots.}$$

Kegiatan Modul 12.1.7

1. Tentukan luas daerah yang dibatai oleh kurva y = $3x^3 - 1$, y = -x ,x = 0 , x = 2 dan sumbu x !
2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva$y = x^3 - 3x^2 + 2x$ dan sumbu x
3. Hitung luas daerah yang dibatasi kurva y = x (x +2)(x -3), sumbu x dengan batas-batas integrasi x = -1 dan x = 2
4. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = sin x , sumbu x , x = 0 dan x = π
5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = 2 sin 2x , sumbu x , $x = -\frac{\pi}{2}\ dan\ x = \frac{\pi}{2}$

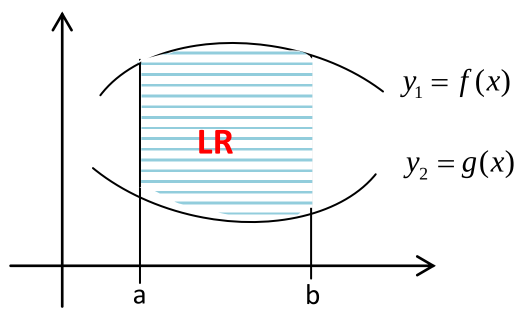
Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.7 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.7

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham aplikasi Integral maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang aplikasi Integral
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

b.1.2. Luas Daerah antara dua kurva y1 = f(x) dan y2 = g(x).

Luas daerah yang dibatasi oleh Kurva y_1 = f(x), y_2=g(x) , x = a , x = b dan sumbu x, didefinisikan :

$$\boldsymbol{LR = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$



Contoh 12 :

Hitung Luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = 2x + 1 , y = x, x = 1 , x = 3 !

Penyelesaian:

$y_1 = 2x + 1$ dan $y_2 = x$ → $y_1 - y_2 = (2x + 1)$ - ..... = x + ……

sehingga :

$$\boldsymbol{LR = \int_1^3 (\dots. + 1)dx = \frac{1}{\dots.} x^{\dots} + \dots.. \Big|_1^3 = \frac{x^2}{\dots.} + \dots\dots \Big|_1^3}$$

$$= \left(\frac{3^{\dots}}{\dots.} + \dots\dots\right) - \left(\frac{1^{\dots\dots}}{\dots\dots} + \dots\dots\right) = \frac{\dots..}{\dots..} - \frac{\dots.}{\dots.} = \dots.$$

Contoh 13.

Hitung Luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = sin 2x , y = cos x, x = 0 , x = $\frac{\pi}{6}$

Penyelesaian :

y_1 = sin 2x dan y_2 = cos x → $y_1 - y_2$ = sin 2x – cos x

sehingga :

$$LR = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos x \; dx) = -\frac{1}{\dots}\cos 2x - \sin x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$LR = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[-\frac{1}{2}\cos 2\left(\frac{\pi}{\dots}\right) - \sin\frac{\pi}{\dots}\right] - \left[-\frac{1}{2}\cos 2(\dots..) - \sin(\dots.)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\dots\dots. - \cdots\dots\right] - \left[-\frac{1}{2}\dots.. - \cdots.\right]$$

$$= (\dots\dots\dots. - \cdots\dots..) = \cdots\dots..$$

Kegiatan Modul 12.1.8

1. Tentukan luas daerah yang dibatai oleh kurva y = $3x^3 - 1$, y = -x , x = 0 , x = 2
2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = x^2 dan y = 2x
3. Hitung luas daerah yang dibatasi kurva y = $x^2 - x$ dan y = $3x - x^2$
4. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh y = sin x dan y = cos 3x, x = 0 dan x = π
5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva y = 2 sin 2x dan y = sin x, x = $-\frac{\pi}{2}$ dan x = $\frac{\pi}{2}$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.8 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.8

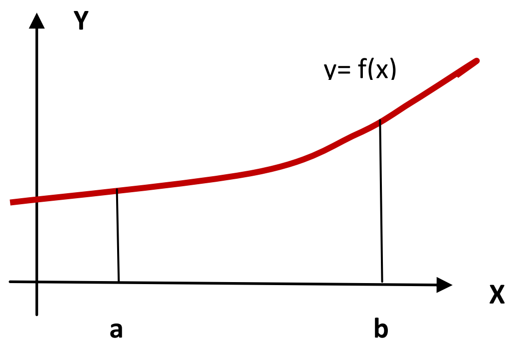
- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham aplikasi Integral maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang aplikasi Integral
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

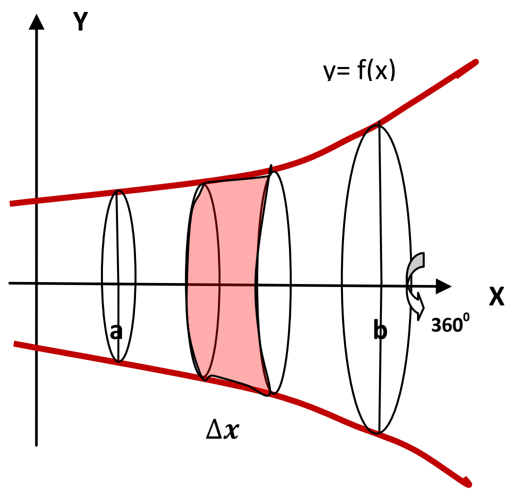
B.2. MENENTUKAN VOLUME BENDA PUTAR.

Jika sebuah gambar pada bidang datar diputar mengelilingi sumbu (sebuah garis lurus) sejauh 360^o , maka akan terjadi sebuah bangun ruang yang disebut benda putar.

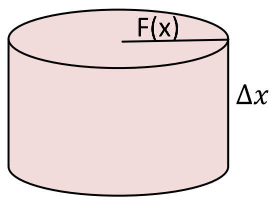
B.2.1. Volume benda putar yang terjadi jika kurva y = f(x) diputar mengeli-lingi sumbu x.

Pada saat SLTP tentunya anda telah memahami bahwa Volume tabung (silinder) yang jari-jari alasnya r dan tinggi t adalah Vt = $\pi r^2 t$.





Bangun yang terjadi dipecah menjadi sector-sektor berupa silinder-silinder dengan tinggi Δx jari-jari f(a) sehingga didapat:



Sehingga : $\boldsymbol{Vt = f(x).\Delta x}$

Karena ada banyak silinder maka volume benda putar yang terjadi dapat didekati dengan Limit suatu jumlah :

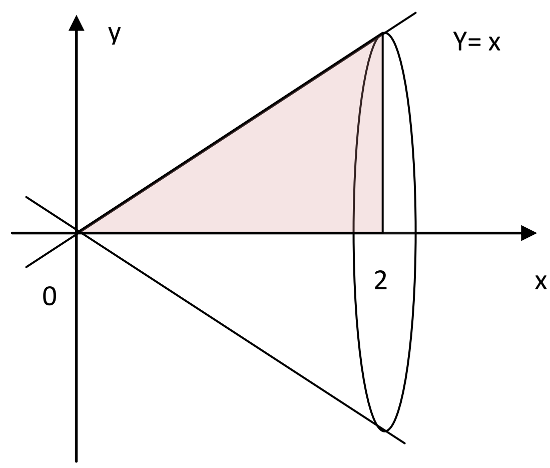
$$\boldsymbol{Vx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} \pi\big(f(x)\big)^2 . \Delta x = \pi \int_{a}^{b} \big(f(x)\big)^2 \, dx}$$

Contoh :14 :

Hitung isi benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = x, sumbu x, garis x = 2 diputar sejauh 360^0 menggelilingi sumbu x

Penyelesaian :

Perhatikan gambar berikut ;



$$Vx = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 x^2$$

$$= \pi \left[\frac{1}{\dots.} \, x^{\dots}\right]_0^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{\dots.}(\dots..)^3\right) - \left(\frac{1}{\dots.}(0)^3\right)\right] = \frac{8\pi}{\dots.}$$

Kegiatan Modul 12.1.9

1. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva-kurva di bawah ini diputar mengelilingi sumbu x
   - a. y = 2x +1, x = 1 dan x = 2
   - b. y = $\sqrt{x}$, x = 0 dan x = 4
   - c. y = x (x -1)
   - d. xy = 1, x = 1 dan x = 9

Catatan :

Volume benda putar yang terjadi jika kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$ diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360_o, maka: kurva y = f(x) diubah menjadi x = f(y) dan y = g(x) diubah menjadi x = g(y)

dan batas $x_1 = a \rightarrow y = a_1$ dan $x_2 = b \rightarrow y_2 = b_1$

$$\boldsymbol{Vy = \pi \int_a^b x^2\, dy = (\pi)F(y)\Big|_a^b}$$

2. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva-kurva di bawah ini diputar mengelilingi sumbu y

   a. x = y, y =2 c. xy = 1, y = 1 dan y = 3

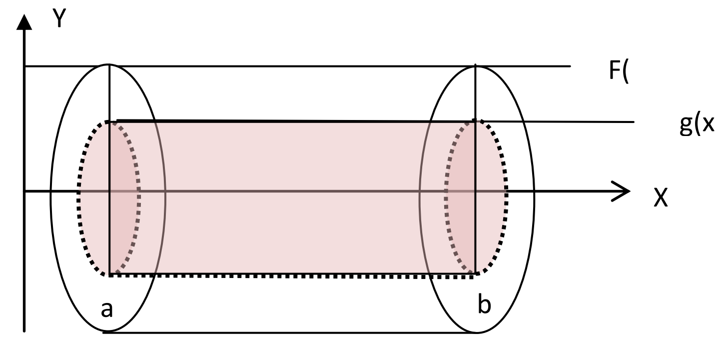
   b. y = x + 1 , y = 2 dan y = 4 d. x = y^2 + 1, y = -1 dan y = 2.

B.2.2. Volume benda putar antara dua kurva diputar mengelilingi sumbu x.

Identik dengan luas daerah antara dua kurva, maka Volume Benda putar antara dua kurva dapat diturunkan sebagai berikut:

Volume benda putar yang dibatasi y oleh Kurva $y_1 = f(x)$, $y_2=g(x)$, x = a, x = b diputar mengelilingi sumbu x, sejauh 360^0 , didefinisikan :

$$\boldsymbol{Vx = \pi \int_a^b \{[f(x)^2] - [g(x)^2]\}\, dx}$$



Contoh 15.

Hitung isi benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = x^2 , y= 2x , diputar sejauh 360^0 menggelilingi sumbu x

Penyelesaian:

Untuk daerah integrasinya ditentukan dari nilai tittik potong ke dua kurva, $y_1 = y_2$

$$x^2 = 2x \leftrightarrow x^2 - \ldots\ldots = 0 \leftrightarrow x(\ldots.-2) = 0$$

$$x = \cdots.\, atau\; x = \cdots..$$

Sedang ${y_1}^2 - {y_2}^2 = (x^2)\ldots..-(\quad)^2 = (\quad)^4 - 4(\quad)^2$

Sehingga :

$$Vx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^{\cdots})dx = \pi\left(\frac{2^{\cdots}}{\ldots.} - \frac{4\ldots.(\ldots\ldots.)^2}{\ldots\ldots}\right)\Big|_0^2$$

$$= \pi\left(\frac{2^{\ldots.}}{\ldots.} - \frac{4(\ldots.)^2}{\ldots.}\right) = \pi\left(\frac{\ldots.}{\ldots.} - \frac{\ldots.}{\ldots.}\right) = \frac{\ldots.\pi}{15}$$

Kegiatan Modul 12.1.10

1. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva-kurva di bawah ini diputar mengelilingi sumbu x

   a. y = 3x -1 dan y = x^2 c. y = x^3 dan y = x^2

   b. y = $\sqrt{x}$ dan y = x d. y = x^2 dan y = 4x – x^2

Catatan: Volume benda putar yang terjadi jika kurva y1 = f(x) dan y2 = g(x) diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360o, maka:

kurva y = f(x) diubah menjadi x = f(y) dan y = g(x) diubah menjadi x = g(y) dan batas $x_1 = a \rightarrow y = a_1$ dan $x_2 = b \rightarrow y_2 = b_1$

$$\boldsymbol{Vy = \pi \int_{a1}^{b1} \{[f(y)]^2\} - [g(y)]^2\, dy}$$

2. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva-kurva di bawah ini diputar mengelilingi sumbu y
   a. $y = x$ dan $y = x^2$
   b. $y = 2x$ dan $y = 2x^2$
   c. $y = x^3$ dan $y = x^2$
   d. $y = \sqrt{x}$ dan $y = x$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan Modul 12.1.10 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan modul 12.1.10

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham aplikasi Integral untuk menghitung luas dan volume pada benda putar maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep tentang aplikasi Integral
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka artinya anda sudah paham tentang Integral untuk menghitung luas dan volume pada benda putar. Siapkan diri anda untuk mengevaluasi hasil belajar modul ini, mintalah **Uji Kompetensi KD 12.1.2** pada guru anda .

BAB III PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat ketuntasan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Siapkan diri anda dan mintalah soal tes akhir modul pada guru anda, Selamat Berjuang

DAFTAR PUSTAKA

Matematika IPS, Penerbit Bumi Aksara, Jakarta.

Wilson Simangunsong, 2005. **Matematika Dasar**, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Olimpiade Matematika , CV Zamrud Kemala

Tempat Mengerjakan :

Kegiatan Modul 12.1.1

a.

b.

c.

d.

e.

f.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.2

1.

a.

b.

c.

2.

a.

b.

c.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.3

1. a. b.

c. d.

e. f.

g. h.

2.

3.

4.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.4

1. a. b. c.

d. e. f.

2. a. b.

3. a.

b.

c.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.5

1. a. b. c.

d. e. f.

2. a. b. c.

d. e. f.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.6

1. a. b. c.

d. e. f.

2. a. b. c.

d. e. f.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.7

1.

2.

3.

4.

5.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.8

1.

2.

3.

4.

5.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.9

1. a

b.

c.

d.

2. a

b.

c.

d.

Nilai : ……………

Kegiatan Modul 12.1.10

1. a

b.

c.

d.

2. a

b.

c.

d.

Nilai : ……………